Спектры степеней определимых отношений на булевых алгебрах *

П.М. Семухин

УДК 510.5+512.563

Аннотация

В данной статье изучаются вопросы, связанные со строением спектра множества атомов и идеала безатомных элементов в вычислимой булевой алгебре. Доказано, что если спектр множества атомов содержит 1-низкую степень, то он содержит вычислимую степень. Также показано, что в вычислимой булевой алгебре характеристики (1,1,0) с вычислимым множеством атомов спектр безатомного идеала состоит из всех Π^0_2 степеней.

§1. Введение. Изучение строения тьюринговых спектров отношений на вычислимых моделях занимает одно из центральных мест в теории конструктивных алгебраических систем. Это исследование началось с работы К. Эша и А. Нероуда [6], в которой они дали синтаксическое описание наследственно вычислимых и наследственно вычислимо перечислимых отношений.

Исследование спектров отношений оказалось не только полезным методом в изучении различных вычислимых представлений данной модели, но и превратилось в самостоятельное и весьма плодотворное направление, связанное с различными областями теории вычислимости и математической логики.

Следуя диссертации В. Харизановой [8], будем называть *спектром степеней* (или просто *спектром*) отношения R на вычислимой модели A следующее множество $\mathrm{Spec}(R)$=$\{$ $\deg(R')$ | существует вычислимая модель $A' \cong A$, в которой R' является образом $R\}$, где $\deg(R')$ — степень Тьюринга множества R'.

Особый интерес представляет изучение спектров отношений на линейных порядках и булевых алгебрах, так как они являются достаточно нетривиальным, но, с другой стороны, хорошо изученным классом моделей.

Недавно С.С. Гончаров, Р. Доуни и Д. Хиршфельд полностью решили вопрос о мощности спектров вычислимых отношений на булевых алгебрах.

Предложение 1 (С.С. Гончаров, Р. Доуни, Д. Хиршфельд [3])**.**
Пусть R — вычислимое отношение на вычислимой булевой алгебре B. Тогда R либо определяется бескванторной формулой с константами из B (в этом случае R наследственно вычислимо), либо $\mathrm{Spec}(R)$ *бесконечен.*

*Работа автора поддержана грантами РФФИ “Инварианты в моделях и их алгоритмические свойства” (код 02-01-00593), “Ведущие научные школы” (код НШ-2112.2003.1) и “Университеты России” (код УР.04.01.013).

Аналогичный результат имеет место для линейных порядков.

Предложение 2 (Д. Хиршфельд)**.** *Пусть R — вычислимое отношение на вычислимом линейном порядке L. Тогда R либо наследственно вычислимо, либо* $\mathrm{Spec}(R)$ *бесконечен.*

Важную роль играет изучение спектров формульно опредилимых отношений, таких как множество соседних элементов в линейных порядках или множества атомов, безатомных элементов и т.д. в булевых алгебрах. Дж. Реммел [10] доказал, что спектр множества атомов в вычислимой булевой алгебре замкнут вверх, а Р. Доуни [7] доказал, что этот спектр всегда содержит неполную степень.

Данная работа посвящена дальнейшему изучению строения спектра множества атомов, а также идеала безатомных элементов в вычислимой булевой алгебре. Определение основных понятий, относящихся к теории вычислимости, теории конструктивных моделей и теории булевых алгебр можно найти в книгах Х. Роджерса [5], Р. Соара [11], С.С. Гончарова, Ю.Л. Ершова [4] и С.С. Гончарова [2] соответственно.

Множество $A \leqslant_T \varnothing'$ называется *1-низким*, если $A' \equiv_T \varnothing'$, где A' — тьюрингов скачок множество A.

Квантор $\forall^{\#}$ означает "для всех, за исключением конечного числа".

При работе с бинарными деревьями будем использовать обозначения из книги С.С. Гончарова [2].

Пусть B — булева алгебра и $x \in B$, тогда $At_B(x)$ обозначает число атомов B, лежащих под x. Идеал, порожденный идеалом Фреше и безатомным идеалом, будем обозначать $S(A)$.

При доказательстве того, что две булевы алгебры изоморфны, мы будем пользоваться критерием Воота, который можно найти в [2].

В §2 мы докажем, что для булевых алгебр определенного вида спектр идеала безатомных элементов является полным, т.е. содержит все Π^0_2 степени. В §3 будет доказано, что если спектр множества атомов содержит 1-низкую степень, то он содержит вычислимую степень. В частности, отсюда следует, что не существует вычислимой булевой алгебры, у которой спектр множества атомов содержит все вычислимо перечислимые степени, кроме вычислимой.

§2. Спектр идеала безатомных элементов. Основной результат этой части содержится в следующей теореме.

Теорема 1. *Пусть B — вычислимая булева алгебра элементарной характеристики* $(1,1,0)$ *такая, что множество атомов B — вычислимо. Тогда для любого Π^0_2-множества C существует вычислимая булева алгебра $B' \cong B$ такая, что $Al(B') \equiv_T C$.*

Доказательство. В работе В.Н. Власова и С.С. Гончарова [1] доказывается, что вычислимая булева алгебра элементарной характеристики (1,1,0) с вычислимым множеством атомов имеет разрешимое представление. Поэтому будем считать, что булева алгебра B разрешима. Будем использовать следующее определение.

Определение. Пусть $\{B_i\}_{i\in\omega}$ последовательность булевых алгебр такая, что:

1) множество $\{(i,x) \mid x \in B_i\}$ — вычислимо перечислимо,

2) функции $f_0(i,x,y) = x \vee_i y$, $f_1(i,x,y) = x \wedge_i y$, $f_2(i,x) = C_i(x)$ — частично вычислимы, где $\vee_i$, $\wedge_i$, C_i — операции, заданные на булевой алгебре B_i,

3) функции $g_0(i) = \mathbf{0}^{B_i}$ и $g_1(i) = \mathbf{1}^{B_i}$ — вычислимы.

Назовем такую последовательность *вычислимой*.

Рассмотрим множество $A = \{\langle x_0, \dots, x_k\rangle \mid x_i \in B_i,\ x_k = \mathbf{0}^{B_k}$ или $x_k = \mathbf{1}^{B_k}$, и $x_k \neq x_{k-1}\}$. Каждому кортежу $\langle x_0, \dots, x_k\rangle \in A$ сопоставим взаимно однозначным образом следующий элемент $x \in \sum\limits_{i\in\omega}{}_{\{\mathbf{0},\mathbf{1}\}} B_i$:

$$x(i) = \begin{cases} x_i, & \text{если } i \leqslant k, \\ \mathbf{0}^{B_i}, & \text{если } i > k \text{ и } x_k = \mathbf{0}^{B_k}, \\ \mathbf{1}^{B_i}, & \text{если } i > k \text{ и } x_k = \mathbf{1}^{B_k}. \end{cases}$$

Ясно, что множество A — вычислимо перечислимо. Тогда существует разнозначная вычислимая функция f такая, что $\rho f = A$. С помощью функции f определим вычислимые функции $\vee$, $\wedge$ и C так, чтобы $B = \langle \mathbb{N},\ \vee, \wedge, C\rangle$ была вычислимой булевой алгеброй, изоморфной $\sum\limits_{i\in\omega}{}_{\{\mathbf{0},\mathbf{1}\}} B_i$. Такую булеву алгебру B назовем *естественным вычислимым представлением* прямой суммы $\sum\limits_{i\in\omega}{}_{\{\mathbf{0},\mathbf{1}\}} B_i$.

Докажем одну вспомогательную лемму.

Лемма 1. *Пусть A и B счетные булевы алгебры такие, что:*

a) множество атомов в A и B бесконечно,

b) A и B не содержат бесконечных атомных элементов,

c) для любого $x \in A$ $(x \in B)$ либо $x \in S(A)$ $(x \in S(B))$, либо $C(x) \in S(A)$ $(C(x) \in S(B))$.

Тогда $A \cong B \cong B_{\omega+\eta}$.

Доказательство. Пусть

$$S = \{(x,y) \mid x \in A,\ y \in B,\ x \in S(A) \iff y \in S(B), \\ x \in Fr(A) \iff y \in Fr(B) \text{ и } x \in S(A) \Longrightarrow At_A(x) = At_B(y)\}.$$

Нетрудно проверить, что S является условием изоморфизма алгебр A и B. Следовательно, по критерию Воота A изоморфна B. Очевидно, что алгебра $B_{\omega+\eta}$ удовлетворяет условиям a), b) и c) леммы 1. Таким образом, A и B изоморфны $B_{\omega+\eta}$.

□

Лемма 2. *Пусть B — разрешимая булева алгебра элементарной характеристики* $(1,1,0)$. *Тогда существует вычислимая последовательность* $\{B_i\}_{i\in\omega}$ *вычислимых булевых алгебр такая, что* $B \cong \sum\limits_{i\in\omega}{}_{\{\mathbf{0},\mathbf{1}\}} B_i$, $\mathrm{ch}_1(B_i) = 0$, *и множества атомов и безатомных элементов B_i равномерно вычислимы по i.*

Доказательство. Так как B разрешима, то идеал Ершова-Тарского $I(B)$ вычислим. Пусть $\{a_i\}_{i\in\omega}$ — вычислимая последовательность, перечисляющая все элементы B. Построим вычислимую последовательность $\{b_i\}_{i\in\omega}$ следующим образом: положим $b_0 = a_t$, где t — наименьшее число такое, что $a_t \in I(B)$ и $a_t \neq \mathbf{0}$; пусть $b_0, \dots, b_n$ уже построены, положим $b_{n+1} = a_t \setminus \bigvee\limits_{i\leqslant n} b_i$, где t — наименьшее число такое, что $a_t \in I(B)$ и $a_t \setminus \bigvee\limits_{i\leqslant n} b_i \neq \mathbf{0}$. Положим $B_i = \widehat{b_i}$. Тогда последовательность $\{B_i\}_{i\in\omega}$ является искомой.

$\square$

Рассмотрим последовательность $\{B_i\}_{i\in\omega}$, существование которой утверждается в лемме 2. Так как $\mathrm{ch}_1(B_i) = 0$, то $B_i \cong A'_i \times B'_i$, где A'_i — атомная булева алгебра, B'_i — безатомная булева алгебра или $\mathbf{0}$.

Заметим, что если $\exists^\infty i\ B'_i \cong \mathbf{0}$, то $\exists^\infty i\ B'_i \cong B_\eta$, так как в противном случае $\mathrm{ch}_1(B) = 0$. Положим $B^1_i = B_i \times B_\eta$. Ясно, что $B \cong \sum\limits_{i\in\omega}{}_{\{\mathbf{0},\mathbf{1}\}} B^1_i$. Поэтому в дальнейшем будем считать, что $B_i \cong A'_i \times B'_i$, где $B'_i \cong B_\eta$ для всех i. Рассмотрим следующие случаи.

Случай 1. $\exists^\infty i\ A'_i$ бесконечна.

Случай 1.1. Существует бесконечно много i таких, что в A'_i существует прямое слагаемое типа B_ω. Положим $B^1_i = B_i \times A^*$, где A^* — разрешимое представление B_ω. Как нетрудно видеть $B \cong \sum\limits_{i\in\omega}{}_{\{\mathbf{0},\mathbf{1}\}} B^1_i$, значит, в данном случае можно считать, что A'_i бесконечна для всех i.

Случай 1.2. Среди i таких, что A'_i бесконечна содержится лишь конечное число i таких, что в A'_i имеется прямое слагаемое типа B_ω. В этом случае $\exists^\infty i\ A'_i \cong B_{\omega\times\eta}$. Аналогично случаю 1.1. положим $B^1_i = B_i \times A^*$, где A^* — разрешимое представление $B_{\omega\times\eta}$. Как нетрудно видеть $B \cong \sum\limits_{i\in\omega}{}_{\{\mathbf{0},\mathbf{1}\}} B^1_i$, значит, в данном случае можно считать, что A'_i бесконечна для всех i.

Случай 2. $\exists^{<\infty} i\ A'_i$ бесконечна. Выделим все A'_i такие, что A'_i бесконечна, в отдельное слагаемое. Оставшаяся часть будет по лемме 1 изоморфна $B_{\omega+\eta}$, т.е. B изоморфна прямому произведению $B_{\omega+\eta}$ и вычислимой бесконечной атомной булевой алгебры. Теперь доказательство теоремы 1 будет следовать из лемм 3 и 4, приводимых ниже.

Лемма 3. *Пусть C — произвольное Π^0_2-множество. Тогда существует вычислимая булева алгебра $B \cong B_{\omega+\eta}$ такая, что $Al(B) \equiv_T C$.*

Доказательство. Если C вычислимое множество, то в качестве B нужно взять разрешимое представление $B_{\omega+\eta}$. Далее будем считать, что C невычислимо. Так как C — Π^0_2-множество, то существует вычислимый предикат $R(x, s)$ такой, что

$$x \in C \iff \exists^\infty s\ R(x, s).$$

Пусть D — вычислимая безатомная булева алгебра и пусть $\{D_i\}_{i\in\omega}$ — сильно вычислимая последовательность конечных подалгебр D такая, что $D_0 = \{\mathbf{0}, \mathbf{1}\}$, $D_{i+1} = \mathrm{gr}(D_i \cup \{a_i\})$, где a_i — атом D_{i+1} и $D = \bigcup\limits_{i\in\omega} D_i$.

Рассмотрим вычислимую последовательность булевых алгебр $\{B_i\}_{i\in\omega}$ такую, что для любого k $B_{2k}=D_0$ и $B_{2k+1}=D$. По шагам будем строить вычислимую последовательность $\{B'_i\}_{i\in\omega}$.

Шаг 0. Для всех k положим $B^0_{2k}=B_{2k}$, $B'_{2k+1}=B_{2k+1}$.

Шаг s+1. Для всех $k\leqslant s+1$ таких, что $R(k,s+1)$ производим следующие построения: если $B^s_{2k}=D_i$, то положим $B^{s+1}_{2k}=D_{i+1}$. Для всех остальных k положим $B^{s+1}_{2k}=B^s_{2k}$. На этом шаг s+1 завершен.

Положим $B'_{2k}=\bigcup\limits_{s\in\omega}B^s_{2k}$. Таким образом последовательность $\{B'_i\}_{i\in\omega}$ построена. Пусть B естественное вычислимое представление $\sum\limits_{i\in\omega}{}_{\{\mathbf{0},\mathbf{1}\}}B'_i$. Имеем следующую эквивалентность

$$k\in C \iff x^k \text{ — безатомный элемент } \sum_{i\in\omega}{}_{\{\mathbf{0},\mathbf{1}\}}B'_i,$$

где

$$x^k(i)=\begin{cases}\mathbf{0}^{B'_i}, & \text{если } i\neq 2k,\\ \mathbf{1}^{B'_i}, & \text{если } i=2k.\end{cases}$$

Значит, $C\leqslant_T Al(B)$. Далее, x — безатомный элемент $\sum\limits_{i\in\omega}{}_{\{\mathbf{0},\mathbf{1}\}}B'_i$ тогда и только тогда, когда существует i_0 такое, что для всех $i>i_0$ $x(i)=\mathbf{0}^{B'_i}$ и для всех $i\leqslant i_0$

$$i \text{ — четное} \implies x(i)=\mathbf{0}^{B'_i} \text{ или } \tfrac{i}{2}\in C.$$

Значит, $Al(B)\leqslant_T C$. Так как C — невычислимо, то $\mathbb{N}\setminus C$ — бесконечно. По лемме 1 $B\cong B_{\omega+\eta}$.

□

Лемма 4. *Пусть $\{B_i\}_{i\in\omega}$ — вычислимая последовательность булевых алгебр таких, что $B_i\cong A'_i\times B'_i$, где A'_i — бесконечная атомная булева алгебра, $B'_i\cong B_\eta$, и множества атомов и безатомных элементов B_i равномерно вычислимы по i. Тогда для любого Π^0_2-множества C существует вычислимая булева алгебра $B\cong\sum\limits_{i\in\omega}{}_{\{\mathbf{0},\mathbf{1}\}}B_i$ такая, что $Al(B)\equiv_T C$.*

Доказательство. Так как множество атомов B_i равномерно вычислимо по i, то можно построить вычислимую последовательность $\{a_i\}_{i\in\omega}$ такую, что a_i — атом B_i. Пусть D — вычислимая безатомная булева алгебра и $\{D_i\}_{i\in\omega}$ — сильно вычислимая последовательность конечных подалгебр, определенная в доказательстве леммы 3. Рассмотрим вычислимую последовательность $\{C_i\}_{i\in\omega}$ такую, что $C_{2k}=D_0$ и $C_{2k+1}=(\widehat{C(a_k)})_{B_k}$. Очевидно, что $\sum\limits_{i\in\omega}{}_{\{\mathbf{0},\mathbf{1}\}}C_i\cong\sum\limits_{i\in\omega}{}_{\{\mathbf{0},\mathbf{1}\}}B_i$. Пусть $R(x,s)$ — вычислимый предикат, такой что

$$x\in C \iff \exists^\infty s\ R(x,s).$$

По шагам построим вычислимую последовательность $\{C'_i\}_{i\in\omega}$.

Шаг 0. Для всех k положим $C^0_{2k}=C_{2k}$, $C'_{2k+1}=C_{2k+1}$.

Шаг s+1. Для всех $k \leqslant s+1$ таких, что $R(k, s+1)$ производим следующие построения: если $C^s_{2k} = D_i$, то положим $C^{s+1}_{2k} = D_{i+1}$. Для всех остальных k положим $C^{s+1}_{2k} = C^s_{2k}$. На этом шаг s+1 завершен.

Положим $C'_{2k} = \bigcup\limits_{s\in\omega} C^s_{2k}$. Так как для любого k C'_{2k} является либо конечной, либо безатомной булевой алгеброй, то $C'_{2k} \times C'_{2k+1} \cong B_k$. Значит, $\sum\limits_{i\in\omega}{}_{\{\mathbf{0},\mathbf{1}\}} C'_i \cong \sum\limits_{i\in\omega}{}_{\{\mathbf{0},\mathbf{1}\}} B_i$. Пусть B — естественное вычислимое представление $\sum\limits_{i\in\omega}{}_{\{\mathbf{0},\mathbf{1}\}} C'_i$. Так как

$$k \in C \iff x^k \text{ — безатомный элемент } \sum_{i\in\omega}{}_{\{\mathbf{0},\mathbf{1}\}} C'_i,$$

где

$$x^k(i) = \begin{cases} \mathbf{0}^{C'_i}, & \text{если } i \neq 2k, \\ \mathbf{1}^{C'_i}, & \text{если } i = 2k, \end{cases}$$

то получаем, что $C \leqslant_T Al(B)$. Так как

$$\begin{aligned} x \in \sum_{i\in\omega}{}_{\{\mathbf{0},\mathbf{1}\}} C'_i \text{ — безатомный } \iff & \text{ существует } i_0 \text{ такое, что } \forall i > i_0 \\ & x(i) = \mathbf{0}^{C'_i} \text{ и для всех } i \leqslant i_0 \\ & (i \text{ — нечетное } \Longrightarrow x(i) \\ & \text{ — безатомный элемент } B_k \text{ и} \\ & x(i) \leqslant C(a_k),\ \text{где } k = \tfrac{i-1}{2}) \ \& \\ & (i \text{ — четное } \Longrightarrow x(i) = \mathbf{0}^{C'_i} \text{ или} \\ & \tfrac{i}{2} \in C). \end{aligned}$$

Значит, $Al(B) \leqslant_T C$.

□

Таким образом, теорема 1 доказана.

§3. Спектр множества атомов. Теперь докажем несколько теорем о свойствах спектра множества атомов в вычислимой булевой алгебре. Прежде всего докажем следующую теорему об изоморфизме.

Теорема 2 (Об изоморфизме)**.** *Пусть A — подалгебра булевой алгебры B такая, что:*

1) *множество $Atom(A)$, атомов алгебры A, бесконечно,*

2) *если $a \in Atom(A)$, то $a \in Fr(B)$,*

3) *если $a \in Al(A)$, то $a \in S(B)$,*

4) *$B = \mathrm{gr}(A \cup Atom(B))$.*

Тогда A изоморфна B.

Доказательство. Пусть $x, y \in B$, будем писать $x \sim y$, если $x \triangle y \in Fr(B)$. Так как $B = \mathrm{gr}(A \cup Atom(B))$, то $\forall b \in B\ \exists a \in A\ a \sim b$. Легко заметить, что $\forall a \in A\ a \in S(A) \iff a \in S(B)$. Положим

$$S = \{(a, b) \in A \times B \mid a \in Fr(A) \iff b \in Fr(B),\ a \in S(A) \iff \\ b \in S(B),\ a \in S(A) \Longrightarrow At_A(a) = At_B(b),\ a \notin S(A) \Longrightarrow a \sim b\}.$$

Рутинная проверка показывает, что S является условием изоморфизма булевых алгебр A и B. Таким образом, по критерию Воота A и B изоморфны. Теорема доказана.

$\square$

Теорема 3. *Пусть B — вычислимая булева алгебра, содержащая бесконечно много атомов, и $Fr(B), Al(B) \in \Delta_2^0$. Тогда существует вычислимая булева алгебра $A \cong B$ такая, что $Fr(A)$ — вычислимо перечислим.*

Доказательство. Так как B — вычислимая булева алгебра, то существует вычислимо перечислимое дерево D и частично вычислимая функция φ такая, что $\langle D, \varphi \rangle$ — дерево, порождающее B. Также существует сильно вычислимая последовательность $\{D_s\}_{s \in \omega}$ конечных поддеревьев D такая, что $D = \bigcup\limits_{s \in \omega} D_s$ и $D_{s+1} = D_s \cup \{L(a), R(a)\}$, где a — концевая вершина D_s.

Назовем вершину $x \in D$ *конечной*, если $\widehat{x} \cap D$ — конечно, где $\widehat{x} = \{y \mid y \preccurlyeq x\}$. Вершину $x \in D$ назовем *полной*, если $\widehat{x} \subseteq D$. Очевидно, что

$$x \text{ — конечная вершина } D \Longleftrightarrow \varphi(x) \in Fr(B),$$
$$x \text{ — полная вершина } D \Longleftrightarrow \varphi(x) \in Al(B).$$

Значит множества конечных и полных вершин являются Δ_2^0-множествами. Тогда существуют сильно вычислимые последовательности $\{F_s\}_{s \in \omega}$ и $\{G_s\}_{s \in \omega}$ конечных множеств, такие что

$$x \text{ — конечная вершина } D \Longrightarrow \forall^{\#} s\ x \in F_s,$$
$$x \text{ — не конечная вершина } D \Longrightarrow \forall^{\#} s\ x \notin F_s,$$
$$x \text{ — полная вершина } D \Longrightarrow \forall^{\#} s\ x \in G_s,$$
$$x \text{ — не полная вершина } D \Longrightarrow \forall^{\#} s\ x \notin G_s.$$

Построим новую сильно вычислимую последовательность $\{F'_s\}_{s \in \omega}$ конечных множеств, такую что

1) $F'_s \subseteq D_s$,
2) x — конечная вершина $D \Longrightarrow \forall^{\#} s\ x \in F'_s$,
3) x — не конечная вершина $D \Longrightarrow \forall^{\#} s\ x \notin F'_s$,
4) F'_s — нижний конус в D_s, т. е. для любых $x, y \in D_s$ из того, что $y \preccurlyeq x$ и $x \in F'_s$ следует, что $y \in F'_s$,
5) $0 \notin F'_s$,
6) если $x \in D_s \setminus F'_s$, то существует $y \preccurlyeq x$ — концевая вершина D_s такая, что $y \notin F'_s$,

7) если x — полная вершина D, то $\forall^{\#} s\ \widehat{x} \cap F'_s = \varnothing$.

Смысл этих условий состоит в том, что последовательность $\{F'_s\}_{s\in\omega}$ обладает теми же основными свойствами, что и $\{F \cap D_s\}_{s\in\omega}$, где F — это множество всех конечных вершин в D.

Положим $F'_0 = F_{s_0} \cap D_0$, где s_0 — это первый шаг, такой что

a) $F_{s_0} \cap D_0$ — нижний конус в D_0,

b) $0 \notin F_{s_0} \cap D_0$,

c) если $x \in D_0 \setminus F_{s_0}$, то существует $y \preccurlyeq x$ — концевая вершина D_0 такая, что $y \notin F_{s_0}$,

d) если $x \in G_{s_0}$, то $\widehat{x} \cap F_{s_0} \cap D_0 = \varnothing$.

Такое s_0 всегда существует. Далее, положим $F'_1 = F_{s_1} \cap D_1$, где s_1 — это первый шаг после s_0, такой что выполнены условия a), b), c) и d) с заменой F_{s_0}, G_{s_0} и D_0 на F_{s_1}, G_{s_1} и D_1 соответственно. И так далее.

Как нетрудно проверить, $\{F'_s\}_{s\in\omega}$ обладает свойствами 1) – 7). Для удобства обозначений вместо F'_s будем в дальнейшем писать просто F_s.

Построение нужной булевой алгебры A будет осуществляться по шагам. К концу шага s будут построены конечная булева алгебра A_s, поддерево $\widetilde{D}_s \subseteq D_s$, отображение $f_s\ :\ \widetilde{D}_s \longrightarrow A_s$ такое, что $\langle \widetilde{D}_s, f_s\rangle$ дерево порождающее булеву алгебру $\widetilde{A}_s = \mathrm{gr}(\{f_s(x) \mid x \in \widetilde{D}_s\})$, а также множества Fr_s, Fr^-_s.

Считаем, что носитель A_s является начальным сегментом $\mathbb{N}$. Если в описании конструкции встречается выражение "делим атом $a \in A_s$ на два атома a_0 и a_1 в A_{s+1}", то это означает, что мы строим булеву алгебру A_{s+1} такую, что носитель A_{s+1} является начальным сегментом $\mathbb{N}$, $A_{s+1} = \mathrm{gr}(A_s \cup \{a_0\})$, $a_0 \notin A_s$ и $a_0 \leqslant a$. Тогда $a_1 = a \backslash a_0$. Ясно, что по заданной A_s и атому $a \in A_s$ это построение можно осуществить эффективно.

Положим $f = \lim_s f_s$ и $\widetilde{A} = \mathrm{gr}(\{f(x) \mid x \in D\})$. Для каждого $m > 0$ заведем следующие требования:

$$R^0_m : m \text{ — не конечная вершина } D \Longrightarrow m \in \mathrm{dom}(f) \text{ и } f(m) \notin Fr(A),$$
$$R^1_m : m \text{ — конечная вершина } D \Longrightarrow m \in \mathrm{dom}(f) \text{ и } f(m) \in Fr(A).$$

Зададим приоритет на требованиях следующим образом:
если $n < m$ и $m \neq S(n)$, то $R^i_n > R^j_m$ для всех $i, j \in \{0, 1\}$,
если $n < m$ и $m = S(n)$, то $R^0_n > R^0_{S(n)} > R^1_n > R^1_{S(n)}$.

Описание конструкции.

Шаг 0. Полагаем $A_0 = \{0, 1\}$, причем 1 — наибольший, а 0 — наименьший элемент A_0, $\widetilde{D}_0 = \{0\}$, $f_0(0) = 1$, $Fr_0 = \varnothing$, $Fr^-_0 = \varnothing$.

Шаг s+1. Будем говорить, что

(i) Требование R^0_m привлекает внимание на шаге s+1, если $m \in D_{s+1}$, $m \notin \widetilde{D}_s$, $H(m) \in \widetilde{D}_s$, $m \notin F_{s+1}$ или $m \in \widetilde{D}_s$, $m \notin F_{s+1}$, $f_s(m) \in Fr_s$ и существует $k \preccurlyeq S(m)$ — концевая вершина $\widetilde{D}_s$ такая, что $f_s(k) \notin Fr_s$.

(ii) Требование R^1_m привлекает внимание на шаге s+1, если $m \in D_{s+1}$, $m \notin \widetilde{D}_s$, $H(m) \in \widetilde{D}_s$, $m \in F_{s+1}$ или $m \in \widetilde{D}_s$, $m \in F_{s+1}$, $f_s(m) \notin Fr_s$.

Пусть R — требование с наивысшим приоритетом, которое привлекает внимание на шаге s+1. Говорим, что это требование действует на шаге s+1. В зависимости от вида требования R будем производить следующие построения:

(1) Пусть $R = R^0_m$ и $m \in D_{s+1}$, $m \notin \widetilde{D}_s$, $H(m) \in \widetilde{D}_s$, $m \notin F_{s+1}$. Рассмотрим $f_s(H(m))$. Если это атом A_s, то делим его на два атома a_0 и a_1 в A_{s+1}, если $f_s(H(m)) = a \vee b$, где a — атом A_s и $b \in Fr^-_s$, то делим a на два атома a_0 и a_1 в A_{s+1}. Полагаем $\widetilde{D}_{s+1} = \widetilde{D}_s \cup \{m, S(m)\}$, $f_{s+1} \restriction \widetilde{D}_s = f_s$, $f_{s+1}(m) = a_0$, $f_{s+1}(S(m)) = f_s(H(m)) \backslash a_0$, $Fr_{s+1} = Fr_s$, $Fr^-_{s+1} = Fr^-_s$.

(2) Пусть $R = R^0_m$ и $m \in \widetilde{D}_s$, $m \notin F_{s+1}$, $f_s(m) \in Fr_s$ и существует $k \preccurlyeq S(m)$ — концевая вершина $\widetilde{D}_s$ такая, что $f_s(k) \notin Fr_s$. Если $f_s(k)$ атом A_s, то делим его на два атома a_0 и a_1 в A_{s+1}, если $f_s(k) = a \vee b$, где a — атом A_s и $b \in Fr^-_s$, то делим a на два атома a_0 и a_1 в A_{s+1}. Полагаем $\widetilde{D}_{s+1} = \widetilde{D}_s \setminus \{k \mid k \prec m\}$,

$$f_{s+1}(n) = \begin{cases} f_s(n), & \text{если } H(m) \preccurlyeq n \text{ или } n \text{ несравнимо с } k \text{ и } m \\ f_s(n) \vee a_0, & \text{если } n = m \\ f_s(n) \backslash a_0, & \text{если } k \preccurlyeq n \preccurlyeq S(m), \end{cases}$$

$Fr^-_{s+1} = Fr^-_s \setminus \{b \in Fr^-_s \mid b \leqslant f_s(m)\} \cup \{f_s(m)\}$, $Fr_{s+1} = Fr_s$.

(3) Пусть $R = R^1_m$ и $m \in D_{s+1}$, $m \notin \widetilde{D}_s$, $H(m) \in \widetilde{D}_s$, $m \in F_{s+1}$. Рассмотрим $f_s(H(m))$. Если это атом A_s, то делим его на два атома a_0 и a_1 в A_{s+1}, если $f_s(H(m)) = a \vee b$, где a — атом A_s и $b \in Fr^-_s$, то делим a на два атома a_0 и a_1 в A_{s+1}. Полагаем $\widetilde{D}_{s+1} = \widetilde{D}_s \cup \{m, S(m)\}$, $f_{s+1} \restriction \widetilde{D}_s = f_s$, $f_{s+1}(m) = a_0$, $f_{s+1}(S(m)) = f_s(H(m)) \backslash a_0$, $Fr_{s+1} = \{x \in A_{s+1} \mid \exists y \in Fr_s \ \ x \leqslant y\} \cup \{f_{s+1}(m)\}$, $Fr^-_{s+1} = Fr^-_s$.

(4) Пусть $R = R^1_m$ и $m \in \widetilde{D}_s$, $m \in F_{s+1}$, $f_s(m) \notin Fr_s$. Полагаем $Fr_{s+1} = Fr_s \cup \{x \in A_s \mid x \leqslant f_s(m)\}$, $A_{s+1} = A_s$, $\widetilde{D}_{s+1} = \widetilde{D}_s$, $f_{s+1} = f_s$, $Fr^-_{s+1} = Fr^-_s$.

На этом шаг s+1 завершен. Теперь доказательство теоремы будет следовать из лемм, приведенных ниже.

Лемма 5. *Для любого s выполнены следующие условия:*

1) Если k — концевая вершина $\widetilde{D}_s$, то $f_s(k) = a \vee b$, где a — атом A_s, $a \notin Fr^-_s$ и ($b \in Fr^-_s$ или $b = 0$),

2) Fr_s — нижний конус в A_s,

3) $\forall n \in \widetilde{D}_s \setminus \{0\}$ $(f_s(n) \in Fr_s \;\&\; f_s(S(n)) \in Fr_s) \Longrightarrow f_s(H(n)) \in Fr_s$,

4) $f_s(0) = 1 \notin Fr_s$,

5) Если k — концевая вершина $\widetilde{D}_s$ и все атомы A_s, лежащие под $f_s(k)$ принадлежат Fr_s, то $f_s(k) \in Fr_s$, *6)* $Fr_s^- \subseteq Fr_s$.

Доказательство. Доказательство будем вести индукцией по s. Пусть на шаге s все эти условия выполнены. Рассмотрим шаг s+1. Пусть на этом шаге действует требование R. Рассмотрим следующие случаи:

(1) $R = R_m^0$ и $m \in D_{s+1}$, $m \notin \widetilde{D}_s$, $H(m) \in \widetilde{D}_s$, $m \notin F_{s+1}$. Так как $m \notin F_{s+1}$, то $H(m) \notin F_{s+1}$. По условию $H(m) \in \widetilde{D}_s$. Покажем, что $f_s(H(m)) \notin Fr_s$. Пусть $f_s(H(m)) \in Fr_s$. Если существует $k \preccurlyeq S(H(m))$ — концевая вершина $\widetilde{D}_s$ такая, что $f_s(k) \notin Fr_s$, то требование $R^0_{H(m)}$ привлекало бы внимание, что невозможно. Значит, для всех концевых вершин $k \in \widetilde{D}_s$ таких, что $k \preccurlyeq S(H(m))$ выполнено $f_s(k) \in Fr_s$. По индукционному предположению получаем, что $f_s(H(H(m))) \in Fr_s$, но $H(H(m)) \notin F_{s+1}$. Проводя это рассуждение еще несколько раз получаем, что $f_s(0) \in Fr_s$ — противоречие. Таким образом $f_s(H(m)) \notin Fr_s$. Теперь выполнение всех условий очевидно.

(2) $R = R_m^0$ и $m \in \widetilde{D}_s$, $m \notin F_{s+1}$, $f_s(m) \in Fr_s$ и существует $k \preccurlyeq S(m)$ — концевая вершина $\widetilde{D}_s$ такая, что $f_s(k) \notin Fr_s$. Проверим условие 3). Пусть $k \preccurlyeq S(m)$ — концевая вершина $\widetilde{D}_s$ такая, что $f_s(k) \notin Fr_s$. Тогда $f_s(k) = a_0 \vee a_1 \vee b$, где a_0, a_1 — атомы A_{s+1}, $a_0 \vee a_1$ — атом A_s, $b \in Fr_s^-$ или $b = 0$. Пусть $n \in \widetilde{D}_{s+1} \setminus \{0\}$ и $f_{s+1}(n) \in Fr_{s+1}$ & $f_{s+1}(S(n)) \in Fr_{s+1}$. Тогда ясно, что $f_s(n) \in Fr_s$ и $f_s(S(n)) \in Fr_s$. По индукционному предположению $f_s(H(n)) \in Fr_s$. Пусть $f_{s+1}(H(n)) \notin Fr_{s+1}$. Это возможно лишь в том случае, если $f_{s+1}(H(n)) = f_s(H(n)) \vee a_0$ либо $f_{s+1}(H(n)) = f_s(H(n)) \backslash a_0$. Если выполнен первый случай, то $H(n) = m$, что невозможно, так как m — концевая вершина $\widetilde{D}_{s+1}$. Если выполнен второй случай, то $k \preccurlyeq H(n)$. Тогда $f_s(k) \leqslant f_s(H(n)) \in Fr_s$. Отсюда, $f_s(k) \in Fr_s$ — противоречие. Таким образом, $f_{s+1}(H(n)) \in Fr_{s+1}$.

Проверка остальных условий достаточно очевидна.

(3) $R = R_m^1$ и $m \in D_{s+1}$, $m \notin \widetilde{D}_s$, $H(m) \in \widetilde{D}_s$, $m \in F_{s+1}$. Проверим условие 3), т.е. что

$$\forall n \in \widetilde{D}_{s+1} \setminus \{0\}\ (f_{s+1}(n) \in Fr_{s+1}\ \&\ f_{s+1}(S(n)) \in Fr_{s+1} \Longrightarrow f_{s+1}(H(n)) \in Fr_{s+1}).$$

Заметим, что $\forall n \in \widetilde{D}_s\ f_s(n) \in Fr_s \iff f_{s+1}(n) \in Fr_{s+1}$. Поэтому для $n \in \widetilde{D}_s \setminus \{0\}$ условие 3) выполнено. Пусть $n = m$. По построению $f_{s+1}(m) \in Fr_{s+1}$. Если $f_{s+1}(S(m)) = f_s(H(m)) \backslash a_0 \in Fr_{s+1}$, то существует $y \in Fr_s$ такой, что $f_s(H(m)) \backslash a_0 \leqslant y$. Тогда $f_s(H(m)) \leqslant y$ и, следовательно, $f_s(H(m)) \in Fr_s$. Значит, $f_{s+1}(H(m)) \in Fr_{s+1}$.

Проверим условие 5). Рассмотрим случай, когда $k = S(m)$, так как проверка остальных случаев тривиальна. Пусть $f_{s+1}(H(m)) = a_0 \vee a_1 \vee b$, $f_{s+1}(m) = a_0$, $f_{s+1}(S(m)) = a_1 \vee b$, где a_0, a_1 — атомы A_{s+1}, $a_0 \vee a_1$ — атом A_s, $b \in Fr_s^-$ или $b = 0$. Предположим, что все атомы A_{s+1}, лежащие под $f_{s+1}(S(m))$, принадлежат Fr_{s+1}. Тогда $a_1 \in Fr_{s+1}$. Значит, существует $y \in Fr_s$ такой, что $a_1 \leqslant y$. Тогда $a = a_0 \vee a_1 \leqslant y$, следовательно, $a \in Fr_s$. Кроме того все атомы A_{s+1}, лежащие под b, являются атомами A_s и принадлежат Fr_s. По индукционному предположению $f_{s+1}(H(m)) \in Fr_s$, значит, $f_{s+1}(S(m)) \in Fr_{s+1}$.

Проверка остальных условий очевидна.

(4) $R = R^1_m$ и $m \in \widetilde{D}_s$, $m \in F_{s+1}$, $f_s(m) \notin Fr_s$. Рассмотрим только условие 3), так как проверка остальных условий тривиальна.

Нужно доказать, что

$$\forall n \in \widetilde{D}_{s+1} \setminus \{0\}\ (f_{s+1}(n) \in Fr_{s+1}\ \&\ f_{s+1}(S(n)) \in Fr_{s+1} \Longrightarrow f_{s+1}(H(n)) \in Fr_{s+1}).$$

Рассмотрим случай, когда $n = m$, так как в остальных случаях доказательство очевидно. По построению $f_{s+1}(m) \in Fr_{s+1}$. Докажем, что $f_{s+1}(S(m)) \notin Fr_{s+1}$. Пусть $f_{s+1}(S(m)) \in Fr_{s+1}$, тогда $f_{s+1}(S(m)) \in Fr_s$. Покажем, что $S(m) \in F_{s+1}$. Действительно, пусть $S(m) \notin F_{s+1}$. Тогда существует $k \preccurlyeq m$ — концевая вершина $\widetilde{D}_s$ такая, что $f_s(k) \notin Fr_s$. Если это не так, то по индукционному предположению получим, что $f_s(m) \in Fr_s$ — противоречие, так как по условию $f_s(m) \notin Fr_s$. Таким образом получили, что $S(m) \in \widetilde{D}_s$, $S(m) \notin F_{s+1}$, $f_s(S(m)) = f_{s+1}(S(m)) \in Fr_s$ и существует $k \preccurlyeq m = S(S(m))$ — концевая вершина $\widetilde{D}_s$ такая, что $f_s(k) \notin Fr_s$. Значит, на шаге s+1 требование $R^0_{S(m)}$ привлекает внимание, что невозможно, так как на этом шаге действует требование R^1_m. Таким образом доказано, что $S(m) \in F_{s+1}$. По условию $m \in F_{s+1}$, значит, $H(m) \in F_{s+1}$. Тогда $f_s(H(m)) \in Fr_s$, так как если $f_s(H(m)) \notin Fr_s$, то требование $R^1_{H(m)}$ привлекает внимание на шаге s+1, что невозможно. Так как $f_s(m) \leqslant f_s(H(m))$, то $f_s(m) \in Fr_s$ — противоречие, так как по условию $f_s(m) \notin Fr_s$. Таким образом, доказали, что $f_{s+1}(S(m)) \notin Fr_{s+1}$.

□

Лемма 6. *Каждое требование действует лишь конечное число раз.*

Доказательство. Рассмотрим $n > 0$ такое, что $n + 1 = S(n)$ и рассмотрим требования R^0_n, R^0_{n+1}, R^1_n, R^1_{n+1}. Пусть s_0 — шаг, после которого ни одно требование с более высоким приоритетом не действует. Тогда существует $s_1 \geqslant s_0$ такое, что для всех $s \geqslant s_1$ $n, S(n) \in \widetilde{D}_s$. Далее, существует $s_2 \geqslant s_1$ такое, что

$$n \text{ — конечная вершина } D \Longrightarrow \forall s \geqslant s_2\ n \in F_s,$$
$$n \text{ — не конечная вершина } D \Longrightarrow \forall s \geqslant s_2\ n \notin F_s,$$
$$S(n) \text{ — конечная вершина } D \Longrightarrow \forall s \geqslant s_2\ S(n) \in F_s,$$
$$S(n) \text{ — не конечная вершина } D \Longrightarrow \forall s \geqslant s_2\ S(n) \notin F_s.$$

Рассмотрим шаг s_2+1. Пусть n и $S(n)$ — не конечные вершины D, тогда $n \notin F_{s_2}$. Если $f_{s_2}(n) \in Fr_{s_2}$, то существует $k \preccurlyeq S(n)$ — концевая вершина $\widetilde{D}_{s_2}$ такая, что $f_{s_2}(k) \notin Fr_{s_2}$, так как в противном случае $f_{s_2}(H(n)) \in Fr_{s_2}$ и $H(n) \notin F_{s_2}$. Так как требование $R^0_{H(n)}$ не привлекает внимание на шаге s_2+1, то для любой концевой вершины $k \preccurlyeq S(H(n))$ дерева $\widetilde{D}_{s_2}$ будем иметь

$f_{s_2}(k) \in Fr_{s_2}$. Значит, $f_{s_2}(H(H(n)) \in Fr_{s_2}$, но $H(H(n)) \notin F_{s_2}$. Продолжая эти рассуждения получим, что $f_{s_2}(0) \in Fr_{s_2}$ — противоречие. Значит требование R^0_n привлекает внимание на шаге $\mathrm{s}_2{+}1$, а тогда оно действует на этом шаге.

Таким образом $f_{s_2+1}(n) \notin Fr_{s_2+1}$. Аналогично $f_{s_2+2}(S(n)) \notin Fr_{s_2+2}$. Значит после шага $\mathrm{s}_2{+}2$ ни одно из требований R^0_n, R^0_{n+1}, R^1_n, R^1_{n+1} не будет привлекать внимания, а, следовательно, не будет действовать.

Пусть n — не конечная, а $S(n)$ — конечная вершины D. Как и выше получаем, что $f_{s_2+1}(n) \notin Fr_{s_2+1}$. Если $f_{s_2+1}(S(n)) \notin Fr_{s_2+1}$, то требование $R^1_{S(n)}$ будет привлекать внимание на шаге $\mathrm{s}_2{+}2$, а, значит, будет действовать на этом шаге. Таким образом, $f_{s_2+2}(S(n)) \in Fr_{s_2+2}$. Значит, после шага $\mathrm{s}_2{+}2$ ни одно из требований R^0_n, R^0_{n+1}, R^1_n, R^1_{n+1} не будет привлекать внимания, а, следовательно, не будет действовать.

Случаи, когда n — конечная, а $S(n)$ — не конечная вершины D и когда n и $S(n)$ — конечные вершины D рассматриваются аналогично.

□

Лемма 7. *Для любого $n \in D$ существует предел $f(n) = \lim_s f_s(n)$.*

Доказательство. Непосредственно следует из предыдущей леммы.

□

Пусть $\widetilde{A} = \mathrm{gr}(f(n) \mid n \in D)$, тогда ясно, что $\langle D, f\rangle$ — дерево, порождающее булеву алгебру $\widetilde{A}$. Значит $B \cong \widetilde{A}$. Положим $Fr = \bigcup\limits_{s\in\omega} Fr_s$. Докажем несколько лемм о свойствах $\widetilde{A}$ и Fr.

Лемма 8. *Если a — атом $\widetilde{A}$, то $a \in Fr(A)$.*

Доказательство. Так как a — атом $\widetilde{A}$, то существует n — концевая вершина D такая, что $f(n) = a$. Тогда существует s_0 такой, что для всех $s \geqslant s_0$ $f_s(n) = f(n)$. Рассмотрим элемент $f_{s_0}(n) \in A_{s_0}$. Тогда $f_{s_0}(n) = a \vee b$, где a — атом A_{s_0}, $b \in Fr^-_{s_0}$ или $b = 0$. В любом случае $b \in Fr(A)$. Так как n — концевая вершина D и $f_s(n) = f_{s_0}(n)$ для всех $s \geqslant s_0$, то a является атомом A. Значит, $a \in Fr(A)$.

□

Лемма 9. *Если n — полная вершина D, то $f(n) \in S(A)$.*

Доказательство. Рассмотрим s_0 такое,что для всех $s \geqslant s_0$ $f_s(n) = f(n)$. Рассмотрим $s_1 \geqslant s_0$ такое, что для всех $s \geqslant s_1$ $F_s \cap \widehat{n} = \varnothing$. Существует $s_2 \geqslant s_1$ такое, что для всех $m \in \widetilde{D}_{s_2} \cap\ \widehat{n}$ $f_{s_2}(m) \notin Fr_{s_2}$. Тогда имеет место следующая эквивалентность: $x \leqslant f(n)$ и x — атом $A \iff x \in A_{s_2}$ и существует $b \in Fr^-_{s_2}$ такое, что $x \leqslant b \leqslant f(n)$.

Отсюда видно, что $f(n)$ содержит лишь конечное число атомов A, т.е. $f(n) \in S(A)$.

□

Лемма 10. *Если x — безатомный элемент $\widetilde{A}$, то $x \in S(A)$.*

Доказательство. Непосредственно следует из предыдущей леммы.

□

Лемма 11. *Если $x \in Fr$, то $x \in Fr(A)$.*

Доказательство. Пусть $x \in Fr$. Рассмотрим s_0 такое, что $x \in Fr_{s_0}$. Пусть $x = x_0 \vee \cdots \vee x_k$, где x_i атом A_{s_0}, для каждого $i = 1, \ldots, k$. Тогда все $x_i \in Fr_{s_0}$. Если существует $b \in Fr^-_{s_0}$ такой, что $x_i \leqslant b$, то x_i — атом A. Если такого b нет, то существует n_i — концевая вершина $\widetilde{D}_{s_0}$ такая, что $f_{s_0}(n_i) = x_i \vee b$, где $b \in Fr^-_{s_0}$ или $b = 0$. Если на каком-то шаге $s \geqslant s_0$ действует требование R^0_m, где $n_i \preccurlyeq m$, то x_i окажется лежащим под элементом из Fr^-_s, значит, $x_i \in Fr(A)$. Если никакое требование вида R^0_m, где $n_i \preccurlyeq m$ не действует после шага s$_0$, то n_i — конечная вершина D, а тогда $x_i \in Fr(A)$.

Таким образом, получаем, что $x \in Fr(A)$.

□

Лемма 12. *Если x — атом A, то $x \in Fr$.*

Доказательство. Рассмотрим s_0 такое, что x — атом A_{s_0}. Если существует $b \in Fr^-_{s_0}$ такой, что $x \leqslant b$, то $x \in Fr_{s_0}$. В противном случае существует n — концевая вершина $\widetilde{D}_{s_0}$ такая, что $f_{s_0}(n) = x \vee b$, где $b \in Fr^-_{s_0}$ или $b = 0$. Если существует $s_1 > s_0$ такой, что $f_{s_1}(n) \neq f_{s_0}(n)$, то это означает, что на каком-то шаге, большем s$_0$, действовало требование R^0_m, где $n \preccurlyeq m$. В этом случае существует $b' \in Fr^-_{s_1}$ такое, что $x \leqslant b'$. Значит, $x \in Fr_{s_1}$.

Если для всех $s \geqslant s_0$ $f_s(n) = f_{s_0}(n)$, то n — концевая вершина D. Значит, существует $s_1 \geqslant s_0$ такое, что для всех $s \geqslant s_1$ $n \in F_s$. Далее, если $f_s(n) \notin Fr_s$, то требование R^1_n привлекает внимание на шаге s. Значит, существует $s_2 \geqslant s_1$ такой, что $f_{s_2}(n) \in Fr_{s_2}$, а тогда $x \in Fr_{s_2}$.

□

Лемма 13. *$Fr(A)$ вычислимо перечислим.*

Доказательство. Так как

$$x \in Fr(A) \Longleftrightarrow \exists x_1 \ldots \exists x_k \bigwedge_{i=1}^{k} x_i \in Fr \bigwedge x = x_1 \vee \cdots \vee x_k$$

и множество Fr вычислимо перечислимо, то $Fr(A)$ вычислимо перечислим.

□

Лемма 14. *A порождается $\widetilde{A}$ и $Atom(A)$.*

Доказательство. Если $x, y \in A$, то будем писать $x \sim y$, если $x \triangle y \in Fr(A)$. Пусть $x \in A$, тогда существует s_0 такое, что $x \in A_{s_0}$. Легко заметить, что существуют $n_1, \ldots, n_k$ — концевые вершины $\widetilde{D}_{s_0}$ такие, что $x \sim f_{s_0}(n_1) \vee \cdots \vee f_{s_0}(n_k)$. Положим $C_{s_0} = \{n_1, \ldots, n_k\}$.

Пусть на шаге $s \geqslant s_0$ мы уже построили C_s. Рассмотрим шаг s+1. Если на нем действует требование вида R^1_m или R^0_m случая (1), то положим $C_{s+1} = C_s$. Если действует требование R^0_m и имеет место случай (2), то рассмотрим k — концевую вершину $\widetilde{D}_s$ из определения случая (2). Положим $C'_s = C_s \setminus \widehat{m}$. Если $k \preccurlyeq n \preccurlyeq S(m)$ для некоторого $n \in C_s$, то положим $C_{s+1} = C'_s \cup \{m\}$, иначе положим $C_{s+1} = C'_s$.

Понятно, что для всех $s \geqslant s_0$ $x \sim \bigvee\limits_{n \in C_s} f_s(n)$. Так как в C_s мы добавляем вершины все меньшего и меньшего уровня, то существует $C = \lim_s C_s$ и $x \sim \bigvee\limits_{n \in C} f(n)$. Так как $\bigvee\limits_{n \in C} f(n) \in \widetilde{A}$, то получаем, что $A = \mathrm{gr}(\widetilde{A} \cup Atom(A))$.

□

По теореме 2 об изоморфизме получаем, что $A \cong \widetilde{A} \cong B$. По лемме 13 $Fr(A)$ вычислимо перечислим. Теорема доказана.

□

Теорема 4. *Пусть B — вычислимая булева алгебра такая, что множество атомов B бесконечно и $Fr(B)$ вычислимо перечислим. Тогда существует вычислимая булева алгебра $A \cong B$ такая, что множество $Atom(A)$ вычислимо.*

Доказательство. Рассмотрим сильно вычислимую последовательность конечных булевых алгебр $\{B_i\}_{i\in\omega}$ такую, что $B_0 = \{\mathbf{0}, \mathbf{1}\}$, $B_{i+1} = \mathrm{gr}(B_i \cup \{a_i\})$, где a_i — атом B_{i+1} и $B = \bigcup\limits_{i\in\omega} B_i$, а также сильно вычислимую последовательность $\{Fr_i\}_{i\in\omega}$ такую, что $Fr_0 = \varnothing$, $Fr_i \subseteq Fr_{i+1}$ и $Fr(B) = \bigcup\limits_{i\in\omega} Fr_i$.

Построение нужной булевой алгебры будем производить по шагам. На шаге s будет построена конечная подалгебра A_s булевой алгебры B_s и множество At_s, состоящее из атомов A_s. Кроме того, любой атом A_s, не входящий в At_s, является атомом B_s.

Шаг 0. Положим $A_0 = B_0$ и $At_0 = \varnothing$.

Шаг s+1. Пусть $B_{s+1} = \mathrm{gr}(B_s \cup \{a_s\})$, где a_s — атом B_{s+1}. Пусть c — атом A_s такой, что $a_s \leqslant c$. Если $c \in At_s$, то положим $A_{s+1} = A_s$, если $c \notin At_s$, то положим $A_{s+1} = \mathrm{gr}(A_s \cup \{a_s\})$. Положим $At_{s+1} = \{x \in A_{s+1} \mid x$ — атом A_{s+1} и $\exists y \in Fr_{s+1} \cap A_{s+1}\ (x \leqslant y)\}$. На этом шаг s+1 завершен.

Пусть $\widetilde{A} = \bigcup\limits_{i\in\omega} A_i$ и $At = \bigcup\limits_{i\in\omega} At_i$. Заметим, что $Atom(\widetilde{A}) = At$. Действительно, пусть a — атом $\widetilde{A}$, тогда a — атом A_s для почти всех s. Если $a \notin At$, то a должен быть атомом B, так как иначе мы бы разделили его на несколько частей. Таким образом, $a \in Fr(B)$ и, по нашему построению, a будет перечислен в At_s на некотором шаге s.

Каждый атом $\widetilde{A}$ является объединением конечного числа атомов из B, так как $At \subseteq Fr(B)$.

Пусть b — атом B. Рассмотрим первый шаг s, такой что $b \in B_s$. Пусть $b \leqslant a$, где a — атом A_s. Если $a \in At_s$, то a — атом $\widetilde{A}$. Если $a \notin At_s$, то $a = b$ и в этом случае a также будет атомом $\widetilde{A}$. Таким образом, каждый атом B лежит под некоторым атомом $\widetilde{A}$. Отсюда следует, что множество атомов $\widetilde{A}$ бесконечно и $Al(\widetilde{A}) \subseteq Al(B) \subseteq S(B)$.

Покажем, что $B = \mathrm{gr}(\widetilde{A} \cup Atom(B))$. Возьмем $b \in B$ и рассмотрим наименьший шаг s, такой что $b \in B_s$. Тогда $b = b_1 \vee \ldots \vee b_k$, где $b_1, \ldots, b_k$ — атомы B_s. Рассмотрим $a = a_1 \vee \ldots \vee a_k \in A_s$, где a_i — это атом A_s, такой что $b_i \leqslant a_i$. Нетрудно видеть, что $a \bigtriangleup b \in Fr(B)$. Следовательно, $B = \mathrm{gr}(\widetilde{A} \cup Atom(B))$

Таким образом, по теореме 2 об изоморфизме $\widetilde{A} \cong B$. Так как $\widetilde{A}$ вычислимо перечислимое множество, то существует разнозначная вычислима функция f такая, что $\rho f = \widetilde{A}$. С помощью функции f определим на $\mathbb{N}$ вычислимые функции $\vee$, $\wedge$ и C так, чтобы $A = \langle \mathbb{N}, \vee, \wedge, C\rangle$ была вычислимой булевой алгеброй, изоморфной $\widetilde{A}$. Так как $x \in Atom(A) \iff f(x) \in At$ и множество At вычислимо перечислимо, то множество $Atom(A)$ вычислимо перечислимо, а значит и вычислимо.

□

Теперь докажем основную теорему о булевых алгебрах с 1-низким множеством атомов.

Теорема 5. *Пусть B — вычислимая булева алгебра и множество атомов B является 1-низким, тогда существует вычислимая булева алгебра $A \cong B$ такая, что множество $Atom(A)$ вычислимо.*

Доказательство. Так как $Fr(B)$ является Σ^0_1-множеством относительно $Atom(B)$, а $Al(B)$ является Π^0_1-множеством относительно $Atom\ (B)$, то из того, что множество $Atom(B)$ 1-низкое следует, что $Fr(B)$ и $Al(B)$ являются Δ^0_2-множествами. Если B содержит конечное число атомов, то доказывать нечего, если B содержит бесконечное число атомов, то доказательство теоремы следует из теорем 3 и 4.

□

После того, как было получено доказательство теоремы 5, П.Е. Алаев указал на то, что в работе Дж. Найт и М. Стоба [9] содержится доказательство такого утверждения: если булева алгебра B является Δ^0_2-алгеброй с предикатами, выделяющими множество атомов, идеал Фреше и идеал безатомных элементов, то существует булева алгебра $A \cong B$, которая является вычислимой вместе с предикатом, выделяющим множество атомов. С помощью этого утверждения можно получить еще одно доказательство теоремы 5.

§4. Открытые проблемы. В свете полученных результатов возникли следующие открытые вопросы: является ли спектр идеала безатомных элементов в вычислимой булевой алгебре характеристики (1,1,0) или (1,0,1) замкнутым вверх, а также, существует ли вычислимая булева алгебра характеристики (1,1,0) или (1,0,1), у которой идеал безатомных элементов наследственно невычислим?

В связи с теоремой 5 возник такой вопрос: пусть спектр множества атомов в вычислимой булевой алгебре содержит n-низкую степень, для некоторого n, тогда содержит ли он вычислимую степень?

Ответы на эти вопросы могут дать более глубокое понимание строения спектров множества атомов и безатомных элементов в вычислимых булевых алгебрах.

В заключение, автор благодарит своего научного руководителя, С.С. Гончарова, за постановку и обсуждение рассматриваемых в этой статье интересных проблем, а также рецензента за полезные замечания по оформлению работы.

Список литературы

[1] В.Н. Власов, С.С. Гончаров, О сильной конструктивизируемости булевых алгебр элементарной характеристики (1,1,0), Алгебра и логика, 32, No. 6, 618–630, 1993.

[2] С.С. Гончаров, Счетные булевы алгебры и разрешимость, Научная книга, Новосибирск, 1996.

[3] С.С. Гончаров, Р. Доуни, Д. Хиршфельд, Спектры степеней для отношений на булевых алгебрах, Алгебра и логика, 42, No. 2, 182–193, 2003.

[4] С.С. Гончаров, Ю.Л. Ершов, Конструктивные модели, Научная книга, Новосибирск, 1999.

[5] Х. Роджерс, Теория рекурсивных функций и эффективная вычислимость, Мир, Москва, 1972.

[6] C.J. Ash and A. Nerode, Intrinsically recursive relations, in J.N. Crossley (ed.), Aspects of Effective Algebra (Clayton, 1979), (Upside Down a Book Co., Yarra Glen, Australia, 1981), 26-41.

[7] R. Downey, Every recursive Boolean algebra is isomorphic to one with incomplete atoms, Ann. Pure and Appl. Logic, 60(1993), 193-206.

[8] V.S. Harizanov, Degree spectrum of a recursive relation on a recursive structure, PhD Thesis, University of Wisconsin, Madison, WI (1987).

[9] J. Knight, M. Stob, Computable Boolean algebras, J. Symb. Logic, 65, No. 4, 2000, 1605–1623.

[10] J.B. Remmel, Recursive isomorphism types of recursive Boolean algebras, J. Symb. Logic 46(1981), 572-594.

[11] R.I. Soare, Recursively Enumerable Sets and Degrees, Perspect. Math. Logic (Springer-Verlag, Heidelberg, 1987).

Семухин Павел Михайлович,
Новосибирский государственный университет,
Механико-математический факультет.

The University of Auckland,
Department of Computer Science,
Private Bag 92019,
Auckland, New Zealand

e-mail: pavel@cs.auckland.ac.nz